CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie – Session 2003

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II (analyse)

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

On rappelle que la dérivée d'ordre n d'une application f est notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

PARTIE I

1- Rappeler la définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0.

2- Soit la fonction f définie par :

$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Prouver que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

3- Soit h une application de classe C^∞ sur un intervalle $J =]-a, a[$, $(a>0)$ et vérifiant :
$\forall x \in [0,a[, \forall n \in \mathbb{N}, h^{(n)}(x) \geq 0$.

On note $R_N(x) = h(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

a- Ecrire R_N à l'aide d'une intégrale.

b- Pour tout couple (x,y) vérifiant $0<x<y<a$, montrer que

$$0 \leqslant R_N(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} h(y).$$

c- En déduire que h est la somme de sa série de Taylor sur $[0,a[$.

PARTIE II

Soit g l'application définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan(x)$.

1- a- Prouver pour tout $n \geq 0$, l'existence d'un polynôme P_n, dont on donnera le degré, tel que pour tout x appartenant à I on ait :

$$g^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)).$$

Tournez la page S.V.P.

b- Montrer que les coefficients de P_n sont des entiers positifs ou nuls.

2- On note $a_n = g^{(2n+1)}(0)$. On s'intéresse à la série de Taylor de la fonction g en 0, c'est-à-dire à la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. On note S(x) la somme de cette série lorsqu'elle converge.

a- Prouver que $\forall x \in I$, $S(x) = \tan(x)$.

b- Quel est le rayon de convergence de la série entière S ?

PARTIE III

Soit S l'ensemble des suites $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant :
$\exists (M,K) \in]0,+\infty[^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq M K^n$.

1- Montrer que S a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2- On considère la loi $\otimes$ définie par $a \otimes b = c$ avec pour tout n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

a- Montrer que S est stable pour la loi $\otimes$.

b- Déterminer un élément neutre pour la loi $\otimes$, sur S, noté e.

3- a- Soit a un élément de S tel que $a_0 = 1$. Montrer qu'il existe une unique suite b telle que $a \otimes b = e$.

b- Soit $(M,K) \in]0,+\infty[^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M K^n$.
Trouver un couple (M',K') tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq M'K'^n$. En déduire que b est dans S.

4- a- Soit s un élément de S . Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$?

b- Inversement soit $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R>0 . La suite $s = (s_n)_{n\geq 0}$ est-elle dans S ?

5- a- Soit h une fonction développable en série entière sur]-R,R[vérifiant h(0)=1.
Montrer que $\frac{1}{h}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

b- En déduire que la fonction tangente est développable en série entière au voisinage de 0.

PARTIE IV

On pose $\tan(z) = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$.

1- Déterminer l'ensemble D de $\mathbb{C}$ sur lequel tan(z) est définie.

2- Montrer que si $z = x + iy$, alors $\tan(z) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)} + i\frac{\mathrm{sh}(y)\mathrm{ch}(y)}{\cos^2(x)+\mathrm{sh}^2(y)}$.

On admet que si φ est une application d'un intervalle J dans D de classe C^1 alors :

$$\frac{d}{dt}[\tan(\varphi(t))] = \varphi'(t)\left[1+\tan^2(\varphi(t))\right] .$$

Soit H l'application $(\rho,\theta)\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\times\mathbb{R} \mapsto \tan\left(\rho e^{i\theta}\right)$.

3- Vérifier que H est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\times\mathbb{R}$.

4- Soit $c_0(\rho) + \sum_{n\geq 1}\left[c_n(\rho)e^{in\theta} + c_{-n}(\rho)e^{-in\theta}\right]$ la série de Fourier de l'application $\theta \mapsto H(\rho,\theta)$.
Rappeler la formule donnant le coefficient $c_n(\rho)$.

5- Soit n un entier relatif et C_n l'application $\rho \mapsto \int_0^{2\pi} \tan\left(\rho e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta$.

a- Montrer que C_n est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, impaire et que :

$\forall\rho\in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\rho\, C_n'(\rho) = n\, C_n(\rho)$.

b- En déduire que :
si n strictement négatif C_n est nulle,
si n pair C_n est nulle

c- Donner l'expression de C_n dans le cas où n est un entier naturel impair. (On ne cherchera pas à calculer la constante multiplicative.)

6- Prouver que l'application tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

_____ Fin de l'énoncé _____